

Topologia Lista 4

Zad 1. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, która jest ciągła tylko w jednym punkcie.

Zad 2. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, ciągłej tylko w liczbach niewymiernych.

Zad 3. Niech \mathbb{R} oznacza prostą euklidesową, a \mathbb{R}_l będzie przestrzenią topologiczną $(\mathbb{R}, \tau_{[\]})$, gdzie $\tau_{[\]}$ jest topologią z Zadania 3 na Liście 3. Które z przekształceń

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_l$, gdzie $f(x) = x$,

a) $g : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $g(x) = x$,

jest ciągłe?

Zad 4. Czy przekształcenie $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $f(x) = [x] - x + 1$, gdzie $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ jest tzw. częścią całkowitą liczby x , jest ciągłe?

Zad 5. Czy przekształcenie $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $f(x) = [x]$ jest ciągłe?

Zad 6. Czy przekształcenie $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}_l$ dane wzorem $f(x) = |x|$ jest ciągłe?

Zad 7. Udowodnić, że funkcja $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest prawostronnie ciągła.

Zad 8. Rozważmy podzbiory $A = \{(x, y) : y = x\}$ i $B = \{(x, y) : y = -x\}$ jako podprzestrzenie

a) płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

b) przestrzeni produktowej $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

Czy przestrzenie A i B są homeomorficzne?

Zad 9. Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną, Y przestrzenią Hausdorffa, a $f : X \rightarrow Y$ funkcja ciągła. Pokazać, że wykres

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

jest domkniętym podzbiorem przestrzeni produktowej $X \times Y$.

Zad 10. Pokazać, że zbiór punktów stałych ciągłego odwzorowania $f : X \rightarrow X$ przestrzeni Hausdorffa X jest zbiorem domkniętym.